

氏 名	榎本 文彦
学 位 の 種 類	博士 (理学)
学 位 記 番 号	博乙第310号
学位授与の日付	平成19年3月22日
学位授与の要件	論文博士 (学位規則第4条第2項)
学位授与の題目	Tilings on a Riemann surface and cubic Pisot numbers (リーマン面上のタイリングと3次ピソ数)
論文審査委員 (主査)	伊藤 秀一 (自然科学研究科・教授)
論文審査委員 (副主査)	小俣 正朗 (自然科学研究科・教授), 宮川 鉄朗 (自然科学研究科・教授), 伊藤 俊次 (自然科学研究科・教授), 畑上 到 (自然科学研究科・教授)

Starting from the following substitution σ :

$$\sigma: \begin{cases} 1 \mapsto 12 \\ 2 \mapsto 3 \\ 3 \mapsto 4 \\ 4 \mapsto 5 \\ 5 \mapsto 1 \end{cases},$$

we studied the tiling substitution τ^* called *the dual tiling substitution of σ* in the paper [?], [?], and found a quasi-periodic tiling of some plane \mathcal{P} with five polygonal prototiles, whose tiling is called τ^* -tiling.

In this paper, we introduce a new tiling substitution σ^* , called *the wedge tiling substitution*, that is, so-called *the extension of the dual substitution of σ* in [?]. We claim that the wedge tiling substitution σ^* produces a tiling of a Riemann surface \mathcal{R} of degree 2, with ten prototiles of parallelograms. The Riemann surface \mathcal{R} is generated by two copies of \mathcal{P} , which is biholomorphic to the Riemann surface of \sqrt{z} in the complex plane. Such a new tiling is called σ^* -tiling.

The relationship between τ^* -tiling of \mathcal{P} and σ^* -tiling of \mathcal{R} is discussed. We claim that the dual tiling substitution τ^* also generates a tiling of the Riemann surface \mathcal{R} , that two tilings of \mathcal{R} , that is, σ^* -tiling and τ^* -tiling are the refinements of some common tiling of \mathcal{R} and that the tiling of \mathcal{R} through τ^* equals that of \mathcal{P} through τ^* by the canonical projection of \mathcal{R} to \mathcal{P} .

$A := \{1, 2, \dots, d\}$ をアルファベットとする. A 上の substitution が次の条件: Pisot, Irreducible, Unimodular を満たすとき, その stepped surface を使って \mathbb{R}^d の中のある L_σ -invariant contractive hyperplane 上に平行四辺形を prototiles とする tiling を構成することができることはよく知られている (論文 [?]). しかしながら, Non-Pisot あるいは Reducible のケースでの一般論はほとんど何も得られていない. その中で, Ito, Ei は次のような substitution σ :

$$\sigma: \begin{cases} 1 \rightarrow 12 \\ 2 \rightarrow 3 \\ 3 \rightarrow 4 \\ 4 \rightarrow 5 \\ 5 \rightarrow 1 \end{cases},$$

を考えた. σ の incidence matrix L_σ の固有多項式は

$$x^5 - x^4 - 1 = (x^2 - x + 1)(x^3 - x - 1)$$

である. σ は reducible, unimodular であり, さらに L_σ の Perron-Frobenius 固有値 λ が 3 次最小 Pisot 数である. λ の共役の固有ベクトルが生成する複素 2 次元部分空間の実部を \mathcal{P} とおく. Ito, Ei は the dual tiling substitution を用いて, つぎのような prototiles (図 ??) からなる \mathcal{P} の tiling を構成した (論文 [?]). この tiling を \mathcal{P} の τ^* -tiling と呼ぶ (図 ??).

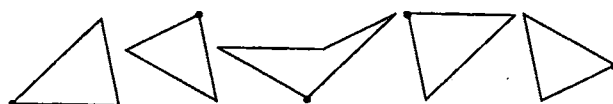


図 1: τ^* -tiling の 5 個の polygonal prototiles

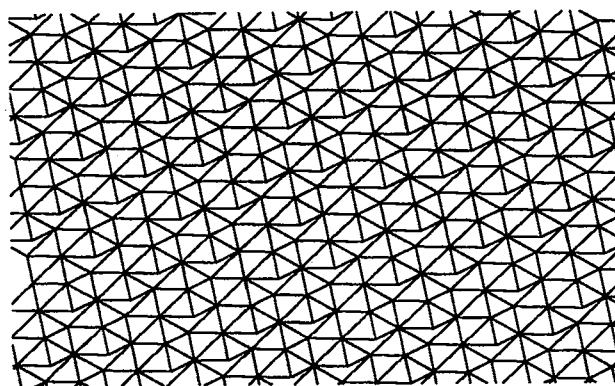


図 2: \mathcal{P} の τ^* -tiling

本論文では \mathcal{P} の 2 枚のコピーにより得られるリーマン面 \mathcal{R} 上に新たな tiling substitution σ^* (the wedge tiling substitution と呼ぶ) を用いて, つぎのような平行四辺形タイルを prototiles (図 ??) にもつ tiling を構成した. この tiling を \mathcal{R} の σ^* -tiling と呼ぶ (図 ??).

定理 1 *The wedge tiling substitution σ^* は Riemann surface \mathcal{R} の a tiling を生成する.*

図 3: σ^* -tiling の平行四辺形による 10 個の prototiles

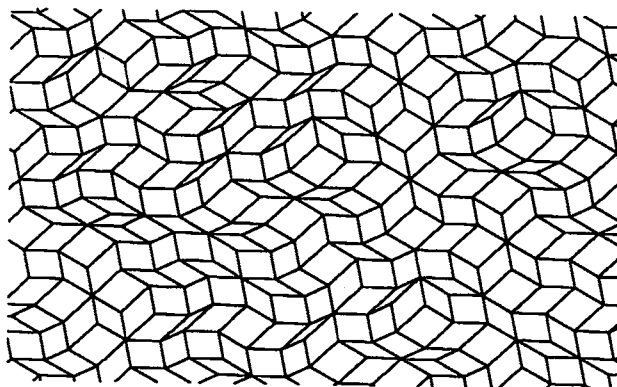


図 4: \mathcal{R} の σ^* -tiling

また, \mathcal{R} の σ^* -tiling は τ^* -tile によって re-tile されること, さらにこの新たに作られた \mathcal{R} の τ^* -tiling は \mathcal{R} から \mathcal{P} への自然な射影により, Ito, Ei の \mathcal{P} 上の τ^* -tiling と一致することを示した.

定理 2 $\varpi : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{P}$ を自然な射影とする. このとき, \mathcal{P} 中の任意の τ^* -tile (x, j^*) に対して, \mathcal{R} の中に丁度 2 個の τ^* -tiles $(x, j^*)_1, (x, j^*)_2$ があって,

$$\varpi(x, j^*)_1 = \varpi(x, j^*)_2 = (x, j^*).$$

が成り立つ.

参考文献

- [1] P.ARNoux and S.Ito, *Pisot substitutions and Rauzy fractals*, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin **8** (2001), no. 2, 181–207.
- [2] H.Ei and S.Ito, *Tilings from some non-irreducible Pisot substitutions*, Discrete Math. Theor. Comput. Sci. **7** (2005), no.1, 81–123.
- [3] H.Ei, S.Ito and H.RAO *Atomic surfaces, tilings and coincidences II: Reducible case*, to appear in Annal. Institute Fourier (Grenoble).
- [4] Y.SANO, P.ARNoux and S.Ito, *Higher dimensional extensions of substitutions and their dual maps*, J. Anal. Math. **83** (2001), 183–206.

学位論文審査結果の要旨

本論文は、与えられたタイリングがどのようなタイリング規則によって構成可能か研究することをテーマとしている。このようなテーマで近年盛んに研究されている手法は、文字の置き換え規則の双対としてタイリングサブスティチューションと呼ばれるタイリング規則を用いてタイリングを説明しようとするものである。この手法は文字の置き換え規則が既約、ピゾ型るとき極めて有効に機能し、多くの準周期タイリングがこの仕組みで説明されることがわかってきた。また、伊藤・江居は近年3次最小ピゾ数と関連する自己相似タイリングについて、平面上に通常の平行四辺形とは異なる奇妙な形をしたプロトタイルを用いたタイリングを構成し、自己相似タイリングの解釈を与えた。本論文では、これらの研究を背景に(1) 2枚の平面コピーにより得られるリーマン面上に平行四辺形をプロトタイルとする新たなタイリングをタイリングサブスティチューションを用いて構成し、(2) このタイリングの細分としてリーマン面上に伊藤・江居のプロトタイルを用いたタイリングが考えられることを示し、(3) さらにリーマン面から平面への自然な射影が伊藤・江居の平面タイリングとなることを示している。これらの結果は、奇妙なプロトタイルによるタイリングの新しい解釈を与えたと共に、その方法がリーマン面上のタイリングという全く新しい地平を開く端緒ともなった点で意義深い。以上のことから、平成19年2月5日に行われた学位論文審査会に於いて審議した結果、本論文は博士(理学)授与に値するものであると判定した。